EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(Durée : 1 h 30 - Coefficient : 3)

---==oOOo==---

On se propose de calculer la somme de la série suivante :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

On examinera différentes méthodes en essayant de préciser à chaque fois l'erreur commise.

1°) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots$

Démontrer que :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2} \qquad (1)$$

(On pourra penser à comparer la série à une intégrale).

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

2°) On veut améliorer la méthode précédente.

On pose $\overline{S}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

Démontrer que :

$$| S - \overline{S}_n | \leqslant \frac{1}{2n^3}$$

(On utilisera (1)).

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

3°) On introduit la série $\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

a) Calculer la somme de cette série.

b) On pose $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$

Démontrer que :

$$\frac{1}{(n+3)^3} \leqslant R'_n \leqslant \frac{1}{n^3}$$

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

c) Posons $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

et $S''_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+3)^3}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$

Démontrer que :

$$| S' - S''_n | \leqslant \frac{9}{2n^4}$$

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

4°) Soit $U_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ ($n \geqslant 1$) .

On pose $u_n = U_n - U_{n-1}$ ($n \geqslant 2$) .

a) On demande de déterminer les réels a,b,c pour que u_n soit un infiniment petit d'ordre maximal en $\frac{1}{n}$.

b) Démontrer alors que :

$$U_n - \frac{1}{8(n-1)^6} \leqslant S \leqslant U_n$$

(On montrera d'abord que $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{8(n-1)^6}$).

c) En déduire la valeur de S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

---==oOOo==---